RECUPERACIÓN ÁLGEBRA 2º BACHILLERATO **Abril 2002**

1.- Halla una matriz B, sabiendo que su primera fila es (1 0) y que verifica

$$A.B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ siendo } A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

¿Es B la inversa de A? ¿Por qué? (2 puntos)

2.- Calcula, sin desarrollar (aplicando las propiedades de los determinantes), los siguientes determinantes:

a) $\begin{vmatrix} a & bc & \frac{1}{a} \\ b & ac & \frac{1}{b} \\ c & ab & \frac{1}{c} \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} a+b & 1 & c \\ b+c & 1 & a \\ a+c & 1 & b \end{vmatrix}$ (2 puntos)

3.- Discute según los valores de a y resuelve cuando sea compatible el sistema:

$$\left.\begin{array}{r} ax + y + z = 2a \\ x - y + z = a - 1 \\ x + (a-1)y + az = a + 3 \end{array}\right\}$$

(2,5 puntos)

4.- Los números a, b y c se suponen conocidos. El siguiente sistema es **siempre** compatible determinado ¿Por qué? (1,5 puntos)

$$\left.\begin{array}{l} x - 3y + z = a \\ x \qquad - z = b \\ x \qquad + z = c \end{array}\right\}$$

5.- La edad de una madre es, en la actualidad, el triple que la de su hijo. La suma de las edades del padre, madre e hijo es de 80 años y dentro de 5 años, la suma de las edades de la madre y del hijo será 5 años más que la edad del padre. ¿Cuántos años tienen en la actualidad el padre, la madre y el hijo? (2 puntos)

SOLUCIONES

1.- $A.B=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 2\\ 2 & 1 & 0\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}1 & 0\\ x & y\\ z & t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ B tiene que ser una matriz 3x2, para que al multiplicar por A, nos de una matriz 2x2. Operamos:

$\begin{pmatrix}-1+2x+2z & 2y+2t\\ 2+x & y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, igualando $\left.\begin{array}{c}-1+2x+2z=1\\ 2y+2t=0\\ 2+x=0\\ y=1\end{array}\right\}$ de donde $\left\{\begin{array}{l}x=-2\\ y=1\\ z=3\\ t=-1\end{array}\right.$

con lo que la matriz pedida es $B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -2 & 1\\ 3 & -1\end{pmatrix}$, que no es la inversa de A porque A no tiene inversa ya que no es cuadrada (solo da la identidad multiplicando a la derecha de A)

2.- a) (multiplicamos la F1 por a, la F2 por b y la F3 por c)= $\dfrac{1}{abc}\begin{vmatrix}a^2 & abc & 1\\ b^2 & abc & 1\\ c^2 & abc & 1\end{vmatrix}=0$ ya que las columnas 2 y 3 son proporcionales.

b)Sumando a la C1 la C3, tendremos: $\begin{vmatrix}a+b+c & 1 & c\\ a+b+c & 1 & a\\ a+b+c & 1 & b\end{vmatrix}=0$ ya que C1 y C2 son proporcionales.

3.- $A=\begin{pmatrix}a & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1\\ 1 & a-1 & a\end{pmatrix}$ y $A'=\begin{pmatrix}a & 1 & 1 & 2a\\ 1 & -1 & 1 & a-1\\ 1 & a-1 & a & a+3\end{pmatrix}$

$|A|=-2a^2+a+1=0\Rightarrow a=1 \quad y \quad a=-\dfrac{1}{2}$

Si a=1 r(A)=2 y $\begin{vmatrix}1 & 1 & 2\\ 1 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 4\end{vmatrix}\neq 0\Rightarrow$ r(A')=3 SISTEMA INCOMPATIBLE

Si $a=-\dfrac{1}{2}$ r(A)=2 y $\begin{vmatrix}-\frac{1}{2} & 1 & -1\\ 1 & -1 & -\frac{3}{2}\\ 1 & -\frac{3}{2} & \frac{5}{2}\end{vmatrix}\neq 0\Rightarrow r(A')=3$ SISTEMA INCOMPATIBLE

Si $a\neq 1 \quad y \quad a\neq -\dfrac{1}{2}\Rightarrow$ r(A)=r(A')=3 SISTEMA COMPATIBLE DETERMINADO

Lo resolvemos por Cramer:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 2a & 1 & 1 \\ a-1 & -1 & 1 \\ a+3 & a-1 & a \end{vmatrix}}{-2a^2+a+1}=\frac{-4a^2+3a+7}{-2a^2+a+1} \qquad z=\frac{\begin{vmatrix} a & 1 & 2a \\ 1 & -1 & a-1 \\ 1 & a-1 & a+3 \end{vmatrix}}{-2a^2+a+1}=\frac{-a^3+3a^2-4a+4}{-2a^2+a+1}$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} a & 2a & 1 \\ 1 & a-1 & 1 \\ 1 & a+3 & a \end{vmatrix}}{-2a^2+a+1}=\frac{a^3-4a^2-a+4}{-2a^2+a+1}=\frac{(a-1)(a+1)(a-4)}{(a-1)(-2a-1)}=\frac{(a+1)(a-4)}{-2a-1}$$

4.- Para que el sistema sea compatible determinado, tiene que ser r(A)=r(A')=3

$A=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $A'=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & a \\ 1 & 0 & -1 & b \\ 1 & 0 & 1 & c \end{pmatrix}$ y $|A|=6 \Rightarrow r(A)=3 \Rightarrow r(A')=3$ valgan lo que valgan a, b y c. Sólo en el caso de que a=b=c=0, tendremos que el sistema solo tiene la solución trivial.

5.- x- edad madre, y- edad padre, z- edad hijo

$$\left.\begin{array}{l} x=3z \\ x+y+z=80 \\ (x+5)+(z+5)=(y+5)+5 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x \quad -3z=0 \\ x+y+z=80 \\ x-y+z=0 \end{array}\right\}$$, lo resolvemos por Cramer:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}=8;\quad x=\frac{\begin{vmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 80 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}}{8}=\frac{240}{8}=30$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 1 & 80 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{8}=\frac{320}{8}=40 \qquad z=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 80 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}}{8}=\frac{80}{8}=10$$

el padre tiene 40 años, la madre 30 años y el hijo 10 años.